Concours Blanc de Mathématiques – MPSI – Corrigé

Noté sur 175 pts ±5 pts pour le soin et la clarté,
puis la note est ramené sur 20 en multipliant par 1/5

/96 Problème d'Analyse – Fonction ζ de Riemann

Dans ce problème, pour une fonction f et un entier naturel k, $f^{(k)}$ désigne la dérivée k-ième de la fonction f. Par convention, $f^{(0)} = f$.

Partie A

Soit n et p dans $\mathbb{N}^*$. On note

$$S_n^{(p)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}$$

Dans cette partie, on étudie la convergence de la suite $(S_n^{(p)})_{n\in\mathbb{N}^*}$.

/1,25 **1)** Montrer que la suite $(S_n^{(p)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$S_{n+1}^{(p)} - S_n^{(p)} = \frac{1}{(n+1)^p} \geq 0$$

si bien que la suite $(S_n^{(p)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

2) Montrer que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{1}{(k+1)^p} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x^p}\,dx \leq \frac{1}{k^p}$$

En déduire que, pour tout $n \geq 2$, on a

$$S_n^{(p)} - 1 \leq \int_1^n \frac{1}{x^p}\,dx \leq S_{n-1}^{(p)}$$

/4

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^p}$ est décroissante sur $[k, k+1]$, donc pour tout $x \in [k, k+1]$, on a

$$\frac{1}{(k+1)^p} \leq \frac{1}{x^p} \leq \frac{1}{k^p}$$

Ainsi par intégration entre k et $k+1$ selon x :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{(k+1)^p}dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x^p}\,dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k^p}dx$$

donc

$$\frac{1}{(k+1)^p} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x^p}\,dx \leq \frac{1}{k^p}$$

En sommant ces inégalités pour k allant de 1 à $n-1$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^p} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{x^p}\,dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^p}$$

donc

$$\sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j^p} \leq \int_1^n \frac{1}{x^p}dx \leq S_{n-1}^{(p)} \qquad \text{avec } j = k+1$$

d'où

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^p} - 1 = S_n^{(p)} - 1 \leq \int_1^n \frac{1}{x^p}dx \leq S_{n-1}^{(p)}$$

/1,75 **3)** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_1^n \frac{1}{x^p}\,dx$. Déterminer le sens de variation de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

$I_{n+1} - I_n = \int_n^{n+1} \frac{1}{x^p}dx \geq 0$ car la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^p}$ est positive sur $[n, n+1]$. Ainsi (I_n) est croissante.

/2 **4)** En calculant I_n, démontrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente si et seulement si $p \geq 2$ et déterminer sa limite en cas de convergence.

— Si $p \geq 2$, alors

$$\begin{aligned} I_n &= \int_1^n x^{-p}dx \\ &= \left[\frac{1}{-p+1}x^{-p+1}\right]_1^n \\ &= \frac{1}{1-p} \times \frac{1}{n^{p-1}} - \frac{1}{1-p} \end{aligned}$$

Comme $p-1>0$, on a $\frac{1}{n^{p-1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, et donc la suite (I_n) converge vers $-\frac{1}{1-p} = \boxed{\frac{1}{p-1}}$

— Si $p=1$, alors $I_n = \int_1^n \frac{1}{x}dx = \ln n$, si bien que (I_n) est divergente.

/3 **5)** Montrer que la suite $(S_n^{(p)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge si et seulement si $p \geq 2$.

— Si $p \geq 2$, alors par les questions **2)** et **4)**, on a

$$S_n^{(p)} - 1 \leq I_n \leq \lim I_n$$

et donc $S_n^{(p)}$ est majorée par $\lim I_n + 1$: comme c'est une suite croissante, elle converge.

— Si $p=1$, alors par les questions **2)** et **4)**, on a

$$S_{n-1}^{(p)} \geq I_n$$

Or, on a vu que I_n tend vers $+\infty$. On en conclut que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{n-1}^{(p)} = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n^{(p)} = +\infty$: la suite $(S_n^{(p)})$ diverge.

Dans la suite du problème, on note $\zeta(p) = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n^{(p)}$ pour tout entier $p \geq 2$.

Partie B – Calcul de $\zeta(2)$

On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $h(t) = \frac{t^2}{2\pi} - t$, et on définit la fonction φ sur $[0,\pi]$ par :

$$\varphi(0) = -1 \qquad \text{et} \qquad \forall t \in]0,\pi] \quad \varphi(t) = \frac{h(t)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

/3 **6)** Montrer que la fonction φ est continue sur $[0,\pi]$.

La fonction φ est continue sur $]0,\pi]$ par quotient et composées de fonction continues. Montrons que φ est continue en 0. On a $2\sin\left(\frac{t}{2}\right) \underset{t\to0}{\sim} 2\times\frac{t}{2} = t$ tandis que $h(t) \underset{t\to0}{\sim} -t$. Ainsi, par quotient d'équivalents,

$$\frac{h(t)}{2\sin\frac{t}{2}} \underset{t\to0}{\sim} \frac{-t}{t} = -1$$

On en déduit que $\lim\limits_{t\to0}\varphi(t) = \varphi(0)$. Donc φ est continue en 0.

/5 **7)** Montrer que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,\pi]$ et déterminer un équivalent simple de $\varphi'(t)$ lorsque t tend vers 0 (on sous-entendra que t est différent de 0).

φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,\pi]$ par quotient de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. Pour tout $t \in]0,\pi]$, on a

$$\varphi'(t) = \frac{\left(\frac{t}{\pi}-1\right)2\sin\frac{t}{2} - \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos\frac{t}{2}}{4\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}$$

Or, comme $\sin\left(\frac{t}{2}\right) \underset{t\to0}{\sim} \frac{t}{2}$, on a : $4\sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \underset{t\to0}{\sim} 4\left(\frac{t}{2}\right)^2 = t^2$. De plus,

$$\left(\frac{t}{\pi}-1\right)2\sin\frac{t}{2} = \left(\frac{t}{\pi}-1\right)\left(t + \underset{t\to0}{o}(t^2)\right) = -t + \frac{t^2}{\pi} + \underset{t\to0}{o}(t^2)$$

$$\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos\frac{t}{2} = \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\left(1 - \frac{t^2}{8} + \underset{t\to0}{o}(t^2)\right) = -t + \frac{t^2}{2\pi} + \underset{t\to0}{o}(t^2)$$

Ainsi,

$$\left(\frac{t}{\pi}-1\right)2\sin\frac{t}{2} - \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos\frac{t}{2} = \frac{t^2}{\pi} - \frac{t^2}{2\pi} + \underset{t\to0}{o}(t^2) \underset{t\to0}{\sim} \frac{t^2}{2\pi}$$

Finalement, par quotient,

$$\varphi'(t) \underset{t\to0}{\sim} \frac{\frac{1}{2\pi}t^2}{t^2} = \boxed{\frac{1}{2\pi}}$$

/3 **8)** En déduire que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$.

Par ce qui précède, il suffit de montrer que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ en 0. De plus, on sait que $\varphi'(t)$ admet une limite épointée finie quand t tend vers 0. Par ailleurs, la fonction φ est continue en 0 par la question **6)**. Par le théorème de la limite de la dérivée, on en déduit que φ est dérivable en 0 avec $\varphi'(0) = \lim_{t\to 0, t\neq 0} \varphi'(t) = \frac{1}{2\pi}$. En particulier, φ' est continue en 0. Donc φ est de classe $\mathscr{C}^1$ en 0 donc sur $[0,\pi]$.

9) Démontrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad \int_0^\pi h(t)\cos(kt)\,dt = \frac{1}{k^2}$$

/4

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi h(t)\cos(kt)\,dt &= \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(kt)\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi t^2\cos(kt)\,dt - \int_0^\pi t\cos(kt)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[t^2\frac{1}{k}\sin(kt)\right]_0^\pi - \frac{1}{k\pi}\int_0^\pi t\sin(kt)dt - \left[t\frac{1}{k}\sin(kt)\right]_0^\pi + \frac{1}{k}\int_0^\pi \sin(kt)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{\pi^2}{k}\sin(k\pi) - \frac{1}{k\pi}\left[-\frac{t}{k}\cos(kt)\right]_0^\pi - \frac{\pi}{k}\sin(k\pi) + \frac{1}{k}\left[-\frac{1}{k}\cos(kt)\right]_0^\pi \\
&= 0 - \frac{1}{k\pi}\left(-\frac{\pi}{k}\cos(k\pi)\right) - 0 - \frac{1}{k^2}(\cos(k\pi) - 1) \\
&= \frac{1}{k^2}\cos(k\pi) - \frac{1}{k^2}\cos(k\pi) + \frac{1}{k^2} \\
&= \boxed{\frac{1}{k^2}}
\end{aligned}$$

10) On note $\Delta :]0,\pi[\to \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout t dans $]0,\pi[$ par $\Delta(t) = \dfrac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \dfrac{1}{2}$. Démontrer que, pour tout $t \in]0,\pi[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{k=1}^n \cos(kt) = \Delta(t)$$

/7,5

Soit $t \in]0,\pi[$. On a :

$$\sum_{k=1}^n \cos(kt) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^n e^{i\,kt}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^n \left(e^{i\,t}\right)^k\right)$$

Or, $e^{i\,t} \neq 1$ car $t \in]0,\pi[$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \cos(kt) &= \mathrm{Re}\left(e^{i\,t}\frac{1-e^{i\,nt}}{1-e^{i\,t}}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(e^{i\,t}\frac{e^{i\,\frac{n}{2}t}\left(e^{-i\,\frac{n}{2}t} - e^{i\,\frac{n}{2}t}\right)}{e^{i\,\frac{t}{2}}\left(e^{-i\,\frac{t}{2}} - e^{i\,\frac{t}{2}}\right)}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(e^{i\,t}\frac{e^{i\,\frac{n}{2}t}\left(-2i\,\sin\left(\frac{n}{2}t\right)\right)}{e^{i\,\frac{t}{2}}\left(-2i\,\sin\frac{t}{2}\right)}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(e^{i\,\frac{n+1}{2}t}\frac{\sin\left(\frac{n}{2}t\right)}{\sin\frac{t}{2}}\right) \\
&= \frac{\sin\left(\frac{n}{2}t\right)}{\sin\frac{t}{2}}\mathrm{Re}\left(e^{i\,\frac{n+1}{2}t}\right) \\
&= \frac{\sin\left(\frac{n}{2}t\right)}{\sin\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{n+1}{2}t\right)
\end{aligned}$$

Or, en utilisant la formule $\sin a\cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$, on obtient :

$$\sin\left(\frac{n}{2}t\right)\cos\left(\frac{n+1}{2}t\right) = \frac{1}{2}\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right) + \frac{1}{2}\sin\left(-\frac{t}{2}\right)$$

On en déduit que :

$$\sum_{k=1}^n \cos(kt) = \boxed{\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}}$$

11) Montrer que Δ se prolonge en une fonction continue en 0 et en π et donner les valeurs de $\Delta(0)$ et $\Delta(\pi)$.

/2,5

Soit $t \in]0,\pi[$. Par ce qui précède, on a

$$\Delta(t) = \sum_{k=1}^{n} \cos(kt)$$

Or, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on a $\lim_{t\to 0} \cos(kt) = \cos(0) = 1$, donc par somme de limite

$$\lim_{t\to 0} \Delta(t) = \sum_{k=1}^{n} 1 = n$$

On en conclut que Δ peut se prolonger par continuité en 0 en posant $\Delta(0) = \boxed{n}$. Sur le même principe, comme $\cos(k\pi) = (-1)^k$, on en conclut que Δ se prolonge par continuité en π en posant

$$\Delta(\pi) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k = \underbrace{-1+1}_{0}\underbrace{-1+1}_{0}+\ldots+(-1)^n = \boxed{\begin{cases} -1 & \text{si } n \in 2\mathbb{N}+1 \\ 0 & \text{si } n \in 2\mathbb{N} \end{cases}} = \boxed{\frac{1}{2}\left((-1)^n - 1\right)}$$

12) Soit ψ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$.

/2 **a)** Justifier que ψ et ψ' sont bornées sur $[0,\pi]$. On notera $M = \max_{[0,\pi]} |\psi|$ et $M' = \max_{[0,\pi]} |\psi'|$.

Comme ψ est de classe $\mathscr{C}^1$, les fonctions ψ et ψ' sont continues sur le segment $[0,\pi]$. Ainsi, par le théorème des bornes atteintes, elles sont bornées sur $[0,\pi]$.

/6 **b)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|\int_0^{\pi} \psi(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right) dt\right| \leq \frac{2M+\pi M'}{n+\frac{1}{2}}$$

$$\int_0^{\pi} \psi(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right) dt = \left[-\psi(t)\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\int_0^{\pi} \psi'(t)\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right) dt$$

Or, $\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right) = \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0$, donc

$$\int_0^{\pi} \psi(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right) dt = \frac{\psi(0)}{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\int_0^{\pi} \psi'(t)\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right) dt$$

si bien que

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^{\pi} \psi(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right) dt\right| &\leq \frac{1}{n+\frac{1}{2}}|\psi(0)| + \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\left|\int_0^{\pi} \psi'(t)\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right) dt\right| \\
&\leq \frac{1}{n+\frac{1}{2}}|\psi(0)| + \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\int_0^{\pi} |\psi'(t)|\, dt \\
&\leq \frac{1}{n+\frac{1}{2}}M + \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\pi M' \\
&= \frac{M+\pi M'}{n+\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{2M+\pi M'}{n+\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

(Si on n'avait pas remarqué que $\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right) = 0$, la majoration "naturelle" aurait conduit à $2M$ et la dernière inégalité ci-dessus aurait été inutile).

/1 **c)** En déduire la limite de $\int_0^{\pi} \psi(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right) dt$ lorsque n tend vers $+\infty$.

On a de manière évidente $\frac{2M+\pi M'}{n+\frac{1}{2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} \psi(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right) dt = \boxed{0}$$

/8 **13)** On rappelle que $\zeta(2) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Démontrer que

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a par la question **9)** :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} &= \sum_{k=1}^{n} \int_0^\pi h(t)\cos(kt)\,dt \\ &= \int_0^\pi h(t) \sum_{k=1}^{n} \cos(kt)\,dt \qquad \text{(par linéarité de l'intégrale)} \\ &= \int_0^\pi h(t)\Delta(t)dt \qquad \text{par la q. } \mathbf{10)}\end{aligned}$$

Or, si $t \in]0, \pi[$, on a

$$h(t)\Delta(t) = h(t)\left(\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}\right) = \varphi(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right) - \frac{1}{2}h(t)$$

et on constate que cette expression est encore valide si $t = 0$ car :

$$\begin{cases} h(0)\Delta(0) = 0 \times n = 0 \\ \varphi(0)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)0\right) - \frac{1}{2}h(0) = \varphi(0) \times 0 - 0 = 0 \end{cases}$$

et de même pour $t = \pi$ car :

$$\begin{cases} h(\pi)\Delta(\pi) = h(\pi) \times \sum_{k=1}^{n}(-1)^k = h(\pi) \times \frac{1}{2}\left((-1)^n - 1\right) \\ \varphi(\pi)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right) - \frac{1}{2}h(\pi) = \frac{h(\pi)}{2} \times (-1)^n - \frac{1}{2}h(\pi) = h(\pi) \times \frac{1}{2}\left((-1)^n - 1\right) \end{cases}$$

Finalement, on a donc pour tout $t \in [0, \pi]$, l'égalité :

$$h(t)\Delta(t) = \varphi(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right) - \frac{1}{2}h(t)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_0^\pi h(t)\Delta(t)dt &= \int_0^\pi \left[\varphi(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right) - \frac{1}{2}h(t)\right]dt \\ &= \int_0^\pi \varphi(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)dt - \frac{1}{2}\int_0^\pi h(t)dt\end{aligned}$$

Or, d'une part

$$-\frac{1}{2}\int_0^\pi h(t)dt = -\frac{1}{2}\left[\frac{t^3}{6\pi} - \frac{t^2}{2}\right]_0^\pi = -\frac{\pi^2}{12} + \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{6}$$

et d'autre part en combinant les questions **8)** et **c)** , on en conclut que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^\pi \varphi(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)dt = 0$. Par conséquent,

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \lim_{n\to+\infty} \int_0^\pi h(t)\Delta(t)dt = 0 + \frac{\pi^2}{6} = \boxed{\frac{\pi^2}{6}}$$

Partie C – Irrationnalité de π

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f_n(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}$$

/1,5 14) Déterminer $f_n^{(2n+2)}$.

On remarque que

$$\deg(X^n(1-X)^n) = \deg(X^n) + \deg((1-X)^n) = n + n\deg(1-X) = 2n$$

Ainsi, f_n est une fonction polynômiale associée à un polynôme de degré $2n$. Comme $2n+2 > 2n$, on en conclut que $f_n^{(2n+2)}$ est la fonction nulle.

15) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f_n{}'(x) = (1-2x)f_{n-1}(x)$$

/1,5

f_n est dérivable en tant que polynôme, et pour tout réel x,

$$\begin{aligned}f_n'(x) &= \frac{1}{n!} \times \left[nx^{n-1}(1-x)^n + nx^n(-1)(1-x)^{n-1}\right] \\ &= \frac{1}{(n-1)!}\left[x^{n-1}(1-x)^n - x^n(1-x)^{n-1}\right] \\ &= \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}(1-x)^{n-1}\left[1-x-x\right] \\ &= \boxed{f_{n-1}(x) \times (1-2x)}\end{aligned}$$

b) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$f_n^{(k+1)}(x) = (1-2x)f_{n-1}^{(k)}(x) - 2kf_{n-1}^{(k-1)}(x)$$

/3,5

On suppose ici $n \geq 2$ pour que la formule ait un sens. Soit $g : x \mapsto 1-2x$. Comme ce sont des polynômes, les fonctions g, f_n et f_{n-1} sont de classe $\mathscr{C}^\infty$. Par la question précédente et la formule de Leibniz, on a pour tout réel x :

$$\begin{aligned}(f_n')^{(k)}(x) &= (gf_{n-1})^{(k)}(x)\\ &= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} g^{(j)}(x) f_{n-1}^{(k-j)}(x)\end{aligned}$$

Or,

$$g^{(j)}(x) = \begin{cases} 1-2x & \text{si } j=0 \\ -2 & \text{si } j=1 \\ 0 & \text{si } j \geq 2 \end{cases}$$

Si bien que

$$\begin{aligned}(f_n)^{(k+1)}(x) &= \binom{k}{0} g^{(0)}(x) f_{n-1}^{(k)}(x) + \binom{k}{1} g^{(1)}(x) f_{n-1}^{(k-1)}(x) + 0\\ &= \boxed{(1-2x)f_{n-1}^{(k)}(x) - 2kf_{n-1}^{(k-1)}(x)}\end{aligned}$$

/5

c) Montrer, par récurrence sur n, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $k \in \mathbb{N}$, $f_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$.

On pose $H_n : \forall k \in \mathbb{N} \quad f_{n+1}^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$. Montrons H_n par récurrence sur n dans $\mathbb{N}^*$.

— Si $n = 1$, alors pour tout réel x, on a $f_1(x) = x(1-x)$ et donc

$$f_1^{(k)}(x) = \begin{cases} x(1-x) & \text{si } k=0 \\ -2x & \text{si } k=1 \\ -2 & \text{si } k=2 \\ 0 & \text{si } k \geq 3 \end{cases}$$

Dans tous les cas, $f_1^{(k)}(0)$ est clairement un entier (0 ou -2). Ainsi, H_1 est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose H_n. Montrons $H_{n,+1}$, i.e. montrons que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $f_{n+1}^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$.

 — Si $k = 0$, alors $f_{n+1}^{(k)}(0) = f_{n+1}(0) = 0 \in \mathbb{Z}$.

 — Si $k \geq 1$, alors par la question précédente :

$$\begin{aligned}f_n^{(k+1)}(0) &= (1-2\times 0)f_{n-1}^{(k)}(0) - 2kf_{n-1}^{(k-1)}(0)\\ &= f_{n-1}^{(k)}(0) - 2kf_{n-1}^{(k-1)}(0)\end{aligned}$$

 Or, par hypothèse de récurrence, $f_{n-1}^{(k)}(0)$ et $f_{n-1}^{(k-1)}(0)$ sont des entiers. Donc $f_n^{(k+1)}(0)$ aussi (car $\mathbb{Z}$ est un anneau...).

Finalement, dans tous les cas on en conclut que $f_{n+1}^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$.

Nous avons donc montré que H_n est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

/2,5

d) En déduire que $f_n^{(k)}(1) \in \mathbb{Z}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.
Indication : on pourra remarquer que $f_n(x) = f_n(1-x)$.

On remarque que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $f_n(x) = f_n(1-x)$. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, par récurrence immédiate :

$$f_n^{(k)}(x) = (-1)^k f_n^{(k)}(1-x)$$

En particulier, on a $f_n^{(k)}(1) = (-1)^k f_n^{(k)}(0)$. Or on a vu en question précédente que $f_n^{(k)}(0)$ est un entier, donc $f_n^{(k)}(1)$ aussi.

16) On veut montrer que π^2 est irrationnel en raisonnant par l'absurde. On suppose que $\pi^2 = \dfrac{a}{b}$, où a et b sont deux entiers naturels non nuls. On pose :

$$F_n(x) = b^n\left(\pi^{2n}f_n(x) - \pi^{2n-2}f_n^{(2)}(x) + \pi^{2n-4}f_n^{(4)}(x) - \ldots + (-1)^n f_n^{(2n)}(x)\right)$$

pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$.

/3

a) Montrer que $F_n(0)$ et $F_n(1)$ sont des entiers.

On a :

$$\begin{aligned}F_n(0) &= b^n\left(\pi^{2n}f_n(0)-\pi^{2n-2}f_n^{(2)}(0)+\pi^{2n-4}f_n^{(4)}(0)-\ldots+(-1)^n f_n^{(2n)}(0)\right)\\&=\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\pi^{2n-2j}f_n^{(2j)}(0)\\&=\sum_{j=0}^{n}(-1)^j f_n^{(2j)}(0)\times\left(b^n\pi^{2n-2j}\right)\end{aligned}$$

Soit $j\in[\![0,n]\!]$. D'une part par la question **15)–c)** , on a $f_n^{(2j)}(0)\in\mathbb{Z}$. D'autre part, on a $b^n\pi^{2n-2j}=a^n\pi^{-2j}=a^n\dfrac{b^j}{a^j}=a^{n-j}b^j\in\mathbb{Z}$. Finalement, $F_n(0)\in\mathbb{Z}$. On montre de même que $F_n(1)\in\mathbb{Z}$.

b) Pour tous $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}$, on pose :

$$g_n(x)=F_n{}'(x)\sin(\pi x)-\pi F_n(x)\cos(\pi x)\quad\text{et}\quad A_n=\pi\int_0^1 a^n f_n(x)\sin(\pi x)\,dx$$

/8 Montrer que $g_n{}'(x)=\pi^2a^nf_n(x)\sin(\pi x)$, et que A_n est un entier.

Comme f_n est de classe $\mathscr{C}^\infty$, F_n puis g_n le sont aussi par combinaisons linéaires de telles fonctions.

$$\begin{aligned}g_n'(x)&=F_n''(x)\sin(\pi x)+\pi F_n'(x)\cos x-\pi F_n'(x)\cos x+\pi^2F_n(x)\sin(\pi x)\\&=\left(F_n''(x)+\pi^2F_n(x)\right)\sin(\pi x)\end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer que $F_n''(x)+\pi^2F_n(x)=\pi^2a^nf_n(x)$. On a

$$F_n(x)=b^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\pi^{2n-2k}f_n^{(2k)}(x)$$

Donc :

$$\begin{aligned}F_n''(x)&=b^n\left(\pi^{2n}f_n^{(2)}(x)-\pi^{2n-2}f_n^{(4)}(x)+\pi^{2n-4}f_n^{(6)}(x)-\ldots+(-1)^nf_n^{(2n+2)}(x)\right)\\&=b^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\pi^{2n-2k}f_n^{(2k+2)}(x)\\&=b^n\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\pi^{2n-2k}f_n^{(2k+2)}(x)+0\qquad\text{car } f_n^{(2n+2)}\equiv 0\\&=b^n\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\pi^{2n-2j+2}f_n^{(2j)}(x)\qquad\text{avec } j=k+1\\&=-\pi^2b^n\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\pi^{2n-2j}f_n^{(2j)}(x)\\&=-\pi^2\left(b^n\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\pi^{2n-2j}f_n^{(2j)}(x)-b^n\pi^{2n}f_n(x)\right)\\&=-\pi^2F_n(x)+\pi^2b^n\pi^{2n}f_n(x)\end{aligned}$$

D'où $F_n''(x)+\pi^2F_n(x)=-\pi^2\pi^{2n}b^nf_n(x)=\boxed{-\pi^2a^nf_n(x)}$. Enfin, par la question précédente :

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_0^1 g_n'=\frac{1}{\pi}(g_n(1)-g_n(0))=\frac{1}{\pi}\left(\pi F_n(1)-\pi F_n(0)\right)=F_n(1)-F_n(0)\boxed{\in\mathbb{Z}}$$

17) On pose $u_n=\dfrac{a^n}{n!}$.

a) Démontrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=0$$

En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir d'un certain rang, puis démontrer que

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=0$$

/5

— On a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{a^{n+1}}{(n+1)!}\times\dfrac{n!}{a^n}=\dfrac{a}{n+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$

— En particulier, (avec $\varepsilon=1$) il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geq N$, on a $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 0\right| \leq 1$, ce qui se réécrit $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ ou encore $u_{n+1} \leq u_n$ car (u_n) est positive. Ainsi, la suite (u_n) est décroissante à partir du rang N.

— (u_n) étant décroissante et positive donc minorée par 0, on en déduit qu'elle converge vers un réel $\ell \geq 0$. Supposons par l'absurde que $\ell > 0$. Alors par quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{\ell}{\ell} = 1$, ce qui contredit ce qu'on a établi plus haut. Donc $\ell = 0$.

b) Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq n_0 \qquad \frac{a^n}{n!} \leq \frac{1}{3}$$

/2

Par ce qui précède, $u_n \to 0$ donc (avec $\varepsilon = \dfrac{1}{3}$) il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a

$$|u_n - 0| \leq \frac{1}{3}$$

On en déduit que $u_n = \dfrac{a^n}{n!} \leq \dfrac{1}{3}$.

c) Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, on a :

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n!}$$

/1

Soit $x \in [0,1]$. Comme $1-x \in [0,1]$, on a $0 \leq x^n \leq 1$ et $0 \leq (1-x)^n \leq 1$. On en conclut par produit que

$$0 \leq x^n(1-x)^n \leq 1$$

et donc $f_n(x) \in [0,1]$.

/6 **d)** Montrer alors que, pour tout entier $n \geq n_0$, $A_n \in]0,1[$.

Soit $n \geq n_0$, on rappelle que :

$$A_n = a^n \pi \int_0^1 f_n(x)\sin(\pi x)\,dx$$

Montrons que $A_n > 0$. Comme a et π sont positifs et que pour tout $x \in [0,1]$, on a $f_n(x) \geq 0$ et $\sin(\pi x) \geq 0$, il est clair que $A_n \geq 0$.

Supposons par l'absurde que $A_n = 0$. Alors comme a et π sont non nuls, on obtient $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\sin(\pi x)dx = 0$. Or, la fonction $x \mapsto f_n(x)\sin(\pi x)$ est positive et continue, donc cela entraine que pour tout $x \in [0,1]$, on a $f_n(x)\sin(\pi x) = 0$. En particulier, pour $x = \dfrac{1}{2}$, on aurait

$$\frac{2^{-n}(1-2^{-n})}{n!} \times 1 = 0$$

ce qui est absurde. Ainsi, $A_n > 0$.

Montrons maintenant que $A_n < 1$. Comme $f_n(x) \leq \dfrac{1}{n!}$, on a :

$$\begin{aligned}
A_n &\leq a^n \pi \frac{1}{n!}\int_0^1 \sin(\pi x)dx \\
&= \frac{1}{n!}a^n\pi\left[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)\right]_0^1 \\
&\leq \frac{1}{3}\pi\frac{1}{\pi}(1+1) \qquad \text{car } n \geq n_0 \\
&= \frac{2}{3} \\
&< 1
\end{aligned}$$

D'où $A_n \in]0,1[$.

/2 **e)** En déduire que π^2 est irrationnel.

À partir de la question **16)**, on a supposé par l'absurde que π^2 est rationnel. Or, on a obtenu d'une part que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $A_n \in \mathbb{Z}$ et d'autre part à la question précédente on sait qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a $0 < A_n < 1$. C'est une contradiction.
Finalement π^2 est irrationnel.

/1 **f)** Comment peut-on en déduire que π est irrationnel ?

Supposons par l'absurde que π est rationnel. Alors $\pi^2 = \pi \times \pi$ est un rationnel (car $\mathbb{Q}$ est un corps). Contradiction avec la question précédente.
Finalement, π est rationnel.

/79 # Problème d'Algèbre – Endomorphismes cycliques d'un espace vectoriel

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on se propose d'étudier les solutions de l'équation matricielle

$$M^2 = A$$

Dans un premier temps, on étudiera deux exemples, puis dans un second temps on démontrera quelques résultats plus généraux. Les trois premières parties sont indépendantes, on peut admettre les résultats des parties précédentes pour traiter la dernière.

Pour tout espace vectoriel E, on notera 0_E le vecteur nul de E, Id_E le morphisme identité de E et $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E. Enfin, on adoptera la notation multiplicative pour la composition d'endomorphismes.

Partie I : le cas $A = I_2$

/2 **1)** Soit $E = \mathbb{C}^2$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ et h un endomorphisme de E vérifiant $h^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^2}$. Que peut-on dire sur h ?

Cela revient à dire, puisque h est linéaire, que h est une symétrie de $\mathbb{C}^2$.

/5 **2)** En déduire que l'équation $M^2 = I_2$ possède une infinité de solutions.

Il suffit de montrer que $\mathbb{C}^2$ possède une infinité de symétries (vectorielles). Pour tout $u \in \mathbb{C}^2$, on peut définir h_u la symétrie selon $\mathrm{Vect}(u)$ parallèlement à un supplémentaire quelconque de $\mathrm{Vect}(u)$. Avec $v \in \mathbb{C}^2$, si $u \neq v$ on a $h_u \neq h_v$ car h_u est une symétrie selon $\mathrm{Vect}(u)$ et h_v est une symétrie selon $\mathrm{Vect}(v)$. On a donc construit une infinité de symétries de $\mathbb{C}^2$. En posant M_u la matrice canoniquement associée à h_u, on en conclut (puisque l'application qui à un morphisme associe canoniquement sa matrice est bijective), qu'il y a bien une infinité de matrices solutions de $M^2 = I_2$.

/4,5 **3)** Donner 2 solutions distinctes de $M^2 = I_2$, dont au moins une ne sera pas une matrice diagonale. On précisera les éléments caractéristiques de l'endomorphisme associé à la solution non diagonale.

On pose $\boxed{M_1 = I_2}$ et $\boxed{M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$. On vérifie que ce sont toutes les deux des solutions de $M^2 = I_2$. Soit s l'endomorphisme canoniquement associé à M_2.

Déterminons les éléments caractéristiques de s : on les notera $F = \mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id}_E)$ et $G = \mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{Id}_E)$. Soit $(x, y) \in \mathbb{C}^2$.

$$\begin{aligned} (x,y) \in F &\iff (x,y) \in \mathrm{Ker}\,(M_2 - I_2) \\ &\iff (M_2 - I_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff x - y = 0 \end{aligned}$$

D'où $F = \boxed{\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid x - y = 0\}}$. De même,

$$\begin{aligned} (x,y) \in G &\iff (x,y) \in \mathrm{Ker}\,(M_2 + I_2) \\ &\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff x + y = 0 \end{aligned}$$

Donc $G = \boxed{\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid x + y = 0\}}$.

Partie II : Un second exemple

Pour cette partie, on note $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $E = \mathbb{C}^2$ et on considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Enfin, on note f l'endomorphisme de E canoniquement associé à A et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on pose

$$f_\lambda = f - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^2}$$

/1,25 **4)** Donner la matrice de f_λ dans la base $\mathcal{B}_c$.

On a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f_\lambda) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f) - \lambda \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^2}) = \boxed{\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix}}$$

/3 **5)** Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de λ, l'application f_λ n'est pas injective.

Comme f_λ est un endomorphisme et que la dimension de $\mathbb{C}^2$ est finie, f_λ n'est pas injective si et seulement si f_λ n'est pas bijective, donc si et seulement si $\det(f_\lambda) = 0$. Or,

$$\begin{aligned}\det(f_\lambda) &= \det \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f_\lambda)\\ &= (2-\lambda)(3-\lambda)-2\\ &= \lambda^2 - 5\lambda + 4\\ &= (\lambda-1)(\lambda-4)\end{aligned}$$

Ainsi, $\det(f_\lambda) = 0$ si et seulement si $\boxed{\lambda = 1 \text{ ou } \lambda = 4}$.

/2,25 **6)** Donner une base de $F_1 = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^2})$ et une base de $F_4 = \mathrm{Ker}(f - 4\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^2})$.

— On a $F_1 = \mathrm{Ker}(A - I_2)$. Or $A - I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ et on montre (même calcul qu'en q. **3)**) que

$$\mathrm{Ker}(A - I_2) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ engendre F_1 et est libre puisque ce vecteur est non nul. Ainsi, la famille $\boxed{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)}$ est une base de F_1.

— On a $F_2 = \mathrm{Ker}(A - 4I_2)$. Or $A - 4I_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et on montre (même calcul qu'en q. **3)**) que

$$\mathrm{Ker}(A - 4I_2) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

Ainsi, la famille $\boxed{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)}$ est une base de F_2.

7) Montrer que F_1 et F_4 sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^2$ supplémentaires. On donnera une base adaptée $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_4)$ à ces deux sous-espaces vectoriels, la
/3,5 première composante de chaque vecteur de la base $\mathcal{B}'$ devra être égale à 1.

Par la question précédente, on a $\dim F_1 = \dim F_4 = 1$, donc $\dim \mathbb{C}^2 = \dim F_1 + \dim F_4$. Il suffit de montrer que $F_1 \cap F_4 = \{0_{\mathbb{C}^2}\}$. Soit $(x, y) \in F_1 \cap F_4$.

Comme $(x, y) \in F_1$, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $(x, y) = \lambda(1, -1)$, donc $x = \lambda$ et $y = -\lambda$. Ainsi, nécessairement, $y = -x$.

Comme $(x, y) = (x, -x) \in F_4$, il existe $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $(x, -x) = \mu(1, 2)$, donc $x = \mu$ et $-x = 2\mu$. Cela entraine par somme que $0 = 3\mu$, donc $\mu = 0$. Par suite, $x = 0$, donc $y = -x = 0$. Finalement, $(x, y) = (0, 0)$. On a donc montré que $F_1 \cap F_4 \subset \{0_{\mathbb{C}^2}\}$, et l'inclusion réciproque est évidente. Finalement, $\boxed{F_1 \oplus F_4 = \mathbb{C}^2}$.

On pose $e'_1 = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}} \in F_1$ et $e'_4 = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}} \in F_4$. On a vu que pour tout $i \in \{1, 4\}$, la famille (e'_i) est une base de F_i, donc (e'_1, e'_4) est bien une base de $\mathbb{C}^2$ adaptée à la décomposition $F_1 \oplus F_4 = \mathbb{C}^2$.

8) Déterminer les deux matrices de changement de bases associées à $\mathcal{B}'$ et à la base
/2 canonique.

La matrice de passage de $\mathcal{B}_c$ vers $\mathcal{B}'$ est :

$$P = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}$$

et la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ vers $\mathcal{B}_c$ est :

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P}\mathrm{com}(P)^\top = \boxed{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

/3 **9)** Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$, qu'on notera A'.

Comme $e'_1 \in F_1 = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^2})$, on a $(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^2})(e'_1) = (0, 0)$, donc $f(e'_1) = e'_1$. De même, on a $f(e'_4) = 4e'_4$. Ainsi,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}}$$

10) On note $\mathcal{C}(f)$ l'ensemble des endomorphismes g de $\mathbb{C}^2$ qui commutent avec f.
/5 Montrer que $\mathcal{C}(f)$ est un sous-anneau et un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$.

Soit $g_1, g_2 \in \mathcal{C}(f)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

— Montrons que $\alpha g_1 + \beta g_2 \in \mathcal{C}(f)$. On a

$$\begin{aligned}(\alpha g_1 + \beta g_2) \circ f &= \alpha(g_1 \circ f) + \beta(g_2 \circ f) \\ &= \alpha(f \circ g_1) + \beta(f \circ g_2) \qquad \text{car } g_1, g_2 \in \mathcal{C}(f) \\ &= f \circ (\alpha g_1 + \beta g_2) \qquad \text{car } f \text{ est linéaire}\end{aligned}$$

Ainsi, $\alpha g_1 + \beta g_2 \in \mathcal{C}(f)$. De plus, l'endomorphisme nul $0_{\mathcal{L}(E)}$ commute avec f car $0_{\mathcal{L}(E)} \circ f = f \circ 0_{\mathcal{L}(E)} = 0_{\mathcal{L}(E)}$. D'où $\mathcal{C}(f)$ est un s.e.v. de $\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$.

— En particulier, par le point précédent, on a $g_1 - g_2 \in \mathcal{C}(f)$. Montrons que $g_1 \circ g_2 \in \mathcal{C}(f)$. On a :

$$\begin{aligned}(g_1 \circ g_2) \circ f &= g_1 \circ g_2 \circ f \qquad \text{par associativité de la composition} \\ &= g_1 \circ f \circ g_2 \qquad \text{car } g_2 \in \mathcal{C}(f) \\ &= f \circ (g_1 \circ g_2) \qquad \text{car } g_1 \in \mathcal{C}(f)\end{aligned}$$

Enfin, Id_E commute avec f car $f \circ \mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_E \circ f = f$. Finalement $\mathcal{C}(f)$ est un s.e.v. de $\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$.

11) Soit $g \in \mathcal{C}(f)$. Soit $k \in \{1, 4\}$, montrer que F_k est stable par g (c'est-à-dire
/3 $g(F_k) \subset F_k$).

Montrons que F_4 est stable par g. Soit $x \in F_4$. Montrons que $g(x) \in F_4$, i.e. que $f(g(x)) = 4g(x)$. Or, comme $g \in \mathcal{C}(f)$, on a

$$f(g(x)) = g(f(x)) = g(4x) \qquad \text{car } x \in F_4$$

On a donc $f(g(x)) = 4g(x)$. D'où F_4 est stable par g. On montre de même que F_1 est stable par g.

12) Soit M une solution de l'équation $M^2 = A$ et h l'endomorphisme canoniquement associé à M. On a donc $h^2 = f$.

/2 **a)** Justifier que h commute avec f.

On a (avec la notation multiplicative pour la composition)

$$hf = hh^2 = h^3 = h^2 h = fh$$

Donc h commute avec f

b) Pour $k \in \{1, 4\}$, déterminer les valeurs possibles de $h(e'_k)$. On devra se
/4 limiter à un nombre fini de valeurs pour chaque k.

Commençons par $k = 4$. On a $e'_4 \in F_4$. Or, par les deux questions précédentes, on a $h \in \mathcal{C}(f)$ donc F_4 est stable par h, si bien que $h(e'_4) \in F_4$. Ainsi $h(e'_4) = \alpha e'_4$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{C}$. Ainsi, $h^2(e'_4) = h(\alpha e'_4) = \alpha h(e'_4) = \alpha^2 e'_4$. Or, $h^2 = f$ donc

$$\alpha^2 e'_4 = h^2(e'_4) = f(e'_4) = 4e'_4$$

Comme e'_4 est non nul, on en déduit que $\alpha^2 = 4$. Ainsi, $\alpha \in \{-2, 2\}$. Finalement, $h(e'_4) \in \boxed{\{-2e'_4, 2e'_4\}}$.

Si $k = 1$, on trouve par le même raisonnement que $h(e'_1) \in \boxed{\{-e'_1, e'_1\}}$.

c) On note M' la matrice de h dans la base $\mathcal{B}'$. Quelles sont les valeurs possibles
/1,5 pour la matrice M' ?

Par ce qui précède, comme $h(e'_1) = \pm e'_1$ et $h(e'_4) = \pm 2e'_4$, il y a 4 valeurs possibles pour M' :

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}$$

13) Montrer que l'équation $M^2 = A$ possède un nombre fini de solutions que l'on
/7 explicitera.

On raisonne par analyse-synthèse.

Analyse : Soit M une solution. Soit h l'endomorphisme canoniquement associé. Par la question **12)**, on en déduit que la matrice M' de h dans la base $\mathcal{B}'$ est limitée aux 4 valeurs données dans la question précédente. Pour chaque valeur M', il n'y a qu'un seul endomorphisme h associé donc une seule matrice M solution de $M^2 = A$, qu'on peut obtenir par changement de base. Plus précisément, en reprenant les matrices de passages de la question **8)** :

$$M = PM'P^{-1}$$

Calculons pour chaque valeur de M' possible la matrice M correspondante :

— On suppose $M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Alors :

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \boxed{\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

— Avec $M' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, on obtient par le même calcul (il suffit de multiplier par -1 toutes les étapes) $M = \boxed{-\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}}$.

— Avec $M' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, on obtient $M = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}$

— Avec $M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, on obtient $M = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}}$

Synthèse : Réciproquement, on vérifie si ces solutions sont correctes :

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \times \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 18 & 9 \\ 18 & 27 \end{pmatrix} = A$$

donc $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \in S$. On montre de même que $-\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \in S$. Enfin,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = A$$

donc $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in S$, de même que $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \in S$. Finalement,

$$S = \boxed{\left\{ \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \right\}}$$

Partie III : Matrices nilpotentes

On note ici $E = \mathbb{C}^n$. On rappelle qu'un endomorphisme f de E est *nilpotent*, si il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$, dans ce cas, on appelle *indice de nilpotence* de f le plus petit entier p tel que $f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

De même, on dit qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est *nilpotente*, s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$, dans ce cas, on appelle *indice de nilpotence* de A le plus petit entier p tel que $A^p = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$.

14) Justifier que si f est endomorphisme de E nilpotent d'indice p, alors il existe $x_0 \in E$ tel que $f^{p-1}(x_0) \neq 0_E$. Pour un tel x_0, montrer que la famille $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0))$ est libre. **/6**

(On suppose $p \geq 1$) Supposons par l'absurde que pour tout $x_0 \in E$, on a $f^{p-1}(x_0) = 0$. Alors f^{p-1} est l'endomorphisme nul. Mais dans ce cas, cela contredit la définition de l'indice de nilpotence p. Ainsi, un tel x_0 existe.

Montrons à présent que $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0))$ est libre. Soit $\lambda_0, \cdots, \lambda_{p-1} \in \mathbb{C}$. On suppose

$$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 f(x_0) + \ldots + \lambda_{p-1} f^{p-1}(x_0) = 0_E$$

En appliquant f^{p-1}, on obtient par linéarité :

$$\lambda_0 f^{p-1}(x_0) + \lambda_1 f^p(x_0) + \ldots + \lambda_{p-1} f^{2p-1}(x_0) = f^{p-1}(0_E) = 0_E$$

Or, $f^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$ pour tout $k \geq p$. Ainsi, l'égalité ci-dessus devient $\lambda_0 f^{p-1}(x_0) = 0_E$, ce qui entraine, puisque $f^{p-1}(x_0) \neq 0_E$, que $\boxed{\lambda_0 = 0}$. On réécrit alors l'égalité en :

$$\lambda_1 f(x_0) + \ldots + \lambda_{p-1} f^{p-1}(x_0) = 0_E$$

En appliquant f^{p-2}, on en déduit de la même manière que $\boxed{\lambda_1 = 0}$. En refaisant le procédé de proche en proche, on en conclut que $\boxed{\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_{p-1} = 0}$. Donc la famille est libre.

15) En déduire une inégalité entre l'indice de nilpotence p d'un endomorphisme et la dimension n de l'espace E. **/1,5**

On sait que dans un espace de dimension n, toute famille libre possède au plus n éléments. Comme la famille $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0))$ est libre et possède p éléments, on en déduit que $\boxed{p \leq n}$.

16) On suppose que A est une matrice carrée d'ordre n nilpotente d'indice p avec

/3 $p > \dfrac{n+1}{2}$. Montrer que l'équation $M^2 = A$ n'a pas de solution.

Supposons par l'absurde qu'il existe une solution M. Alors

$$M^{2p} = A^p = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$$

alors que $M^{2p-2} = \left(M^2\right)^{p-1} = A^{p-1} \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$. Ainsi M est nilpotente d'indice $q \in \{2p-1, 2p\}$. Or $2p-1 > n+1-1 = n$ donc $q > n$.

Cependant, on sait que si u est l'endomorphisme canoniquement associé à M, on a pour tout entier naturel k, $M^k = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(u)^k = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(u^k)$, si bien que u et M ont le même indice de nilpotence. En particulier, u a pour indice de nilpotence $q > n$. Or, par la question précédente, on doit nécessairement avoir $q \leq n$. Contradiction. Ainsi, l'équation $M^2 = A$ n'a pas de solution.

Partie IV : Matrices de rang 1

On note encore $E = \mathbb{C}^n$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice de rang 1, on notera f_A l'endomorphisme canoniquement associé à A. On se propose de démontrer que $M^2 = A$ a une solution si et seulement si $\mathrm{Im}(f_A) \cap \mathrm{Ker}\,(f_A) = \{0_E\}$.

17) On suppose que $\mathrm{Im}(f_A) \cap \mathrm{Ker}\,(f_A) = \{0_E\}$.

/2 **a)** Justifier que $\mathrm{Im}(f_A)$ et $\mathrm{Ker}\,(f_A)$ sont supplémentaires.

Comme $\mathrm{Im}(f_A) \cap \mathrm{Ker}\,(f_A) = \{0_E\}$, et que E est de dimension finie, il suffit de montrer que $\dim \mathrm{Im}\,(f_A) + \dim \mathrm{Ker}\,(f_A) = \dim E$. Or, c'est une conséquence directe du théorème du rang appliqué à f_A. D'où le résultat.

/1 **b)** Montrer que $\mathrm{Im}\,(f_A)$ est stable par f_A.

Soit $y \in \mathrm{Im}\,(f_A)$. Il suffit de montrer que $f_A(y) \in \mathrm{Im}\,(f_A)$. Mais cela est évident par définition de $\mathrm{Im}\,(f_A)$.

c) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle f_A est représentée la matrice

$$\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

/5 avec a un complexe non nul.

Par la question a), on a $E = \mathrm{Im}(f_A) \oplus \mathrm{Ker}\,(f_A)$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base adaptée à cette décomposition. Comme $\dim \mathrm{Im}\,(f_A) = 1$, on peut, quitte à changer l'ordre des vecteurs de $\mathcal{B}$, considérer que $e_1 \in \mathrm{Im}\,(f_A)$ et que $e_2, \cdots, e_n \in \mathrm{Ker}\,(f_A)$. Ensuite, par la question précédente, on a $f_A(e_1) \in \mathrm{Im}\,(f_A) = \mathrm{Vect}(e_1)$, donc il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que $f_A(e_1) = ae_1$. De plus, par définition de $\mathrm{Ker}\,(f_A)$, on a $f_A(e_2) = \ldots = f_A(e_n) = 0_E$. Ainsi,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

Enfin, comme f_A est de rang 1, la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f_A)$ est aussi de rang 1, ce qui entraine nécessairement $a \neq 0$.

/3 **d)** En déduire qu'il existe un endomorphisme h de $\mathbb{C}^n$ tel que $h^2 = f_A$.

Soit b une racine carrée (dans $\mathbb{C}$) de a : on pose $N = \begin{pmatrix} b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$.

On vérifie facilement que $N^2 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f_A)$.

Ainsi, en notant h l'endomorphisme tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(h) = N$, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(h^2) = N^2 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f_A)$, si bien que $h^2 = f_A$.

18) On suppose maintenant que $\mathrm{Im}(f_A) \cap \mathrm{Ker}\,(f_A) \neq \{0_E\}$ et qu'il existe une matrice M telle que $M^2 = A$. On notera h l'endomorphisme canoniquement associé à M. On a donc $f_A = h^2$.

/3 **a)** Justifier que $\mathrm{Im}(f_A) \subset \mathrm{Ker}\,(f_A)$.

D'une part, comme $\mathrm{Im}(f_A) \cap \mathrm{Ker}\,(f_A) \neq \{0_E\}$, on a $\dim\left(\mathrm{Im}(f_A) \cap \mathrm{Ker}\,(f_A)\right) \geq 1$.

D'autre part $\mathrm{Im}(f_A) \cap \mathrm{Ker}\,(f_A) \subset \mathrm{Im}\,(f_A)$ et comme $\mathrm{Im}\,(f_A)$ est de dimension 1, on en conclut que $\dim\left(\mathrm{Im}(f_A) \cap \mathrm{Ker}\,(f_A)\right) \leq 1$

Ainsi, $\dim\left(\mathrm{Im}(f_A) \cap \mathrm{Ker}\,(f_A)\right) = 1 = \dim \mathrm{Im}\,(f_A)$. Comme $\mathrm{Im}(f_A) \cap \mathrm{Ker}\,(f_A) \subset \mathrm{Im}\,(f_A)$, on en conclut que

$$\mathrm{Im}(f_A) \cap \mathrm{Ker}\,(f_A) = \mathrm{Im}\,(f_A)$$

En particulier,

$$\mathrm{Im}\,(f_A) = \mathrm{Im}(f_A) \cap \mathrm{Ker}\,(f_A) \subset \mathrm{Ker}\,(f_A)$$

D'où le résultat.

b) Montrer que $\mathrm{Im}(f_A)$ est stable par h. Dans la suite, on notera $\widetilde{h} : \mathrm{Im}\,(f_A) \to \mathrm{Im}\,(f_A)$ l'endomorphisme obtenu en prenant la restriction et la corestriction de h à $\mathrm{Im}\,(f_A)$.

Soit $y \in \mathrm{Im}\,(f_A)$. Montrons que $h(y) \in \mathrm{Im}\,(f_A)$. Comme $y \in \mathrm{Im}\,(f_A)$, il existe $x \in E$ tel que $y = f_A(x)$. Ainsi,

$$h(y) = h(f_A(x)) = h(h^2(x)) = h^3(x) = h^2(h(x)) = f_A(h(x))$$

de sorte que $h(y) \in \mathrm{Im}\,(f_A)$. D'où le résultat.

c) Montrer que $\widetilde{h}$ est nilpotent d'indice supérieur ou égal à 3.

Erreur d'énoncé : question hors-barème. Dans les faits si on prouvait que $\widetilde{h}$ est nilpotent, on montrerait qu'il est l'endomorphisme nul : en effet comme $\widetilde{h}$ est un endomorphisme dans un espace de dimension 1, si on se donne une base (v) de cet espace, alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\widetilde{h}(v) = \lambda v$. Si $\widetilde{h}$ est nilpotent d'indice $p \geq 1$, alors $\widetilde{h}^p(v) = \lambda^p v = 0_E$, mais comme $v \neq 0_E$, cela entraine $\lambda^p = 0$, donc $\lambda = 0$.

/**3,5** **d)** Conclure.

En admettant la question précédente, $\widetilde{h}$ est nilpotent d'indice $p \geq 3$. Or il est défini sur l'espace $\mathrm{Im}\,(f_A)$ qui est de dimension 1, par la question **16)**, on a donc $p > \dfrac{1+1}{2} = 1$, contradiction.

/**2** **19)** Conclure.